Selection theorems on realcompact spaces and finitistic spaces

著者	山内 貴光
内容記述	Thesis (Ph. D. in Science)--University of Tsukuba, (A), no. 3893, 2006.3.24 Includes bibliographical references
発行年	2006
URL	http://hdl.handle.net/2241/18294

【61】

氏　名（本籍）	**山　内　貴　光**（やまうちたかみつ）（**栃木県**）
学位の種類	博　　士（理　　学）
学位記番号	博　甲　第　3893　号
学位授与年月日	平成18年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	**Selection Theorems on Realcompact Spaces and Finitistic Spaces** （実コンパクト空間及びFinitistic空間上の選択定理）

主　査	筑波大学教授	理学博士	保　科　隆　雄
副　査	筑波大学教授	理学博士	磯　崎　　　洋
副　査	筑波大学教授	理学博士	加　藤　久　男
副　査	筑波大学助教授	理学博士	酒　井　克　郎

論文の内容の要旨

本論文は，位相空間論において主要な研究対象の一つである集合値写像の選択写像の存在定理を論じたもので，5章からなる。

集合Xの各元に対して集合Yの部分集合を対応させるとき，これを通常の写像と区別して集合値写像といい，Yの冪集合2^Yを用いて$\varphi : X \to 2^Y$と表わす。$\varphi : X \to 2^Y$に対して，写像$f : X \to Y$で，全ての$x \in X$に対して$f(x) \in \varphi(x)$となるものを，φの選択写像という。Zermeroの選出公理により，このようなfの存在は保証されているが，X，Yが位相空間のとき，X，Y，φのいかなる条件下でfは連続となるようにとれるか，1956年Michaelは，いち早くこの問題に着目し，今日に至る選択写像の研究の発端となった次の定理を証明した。「T_1-空間Xがparacompactである必要十分条件は，任意のBanach空間Yへの下半連続な任意の写像$\varphi : X \to F_c(Y)$が，連続な選択写像を持つことである。」$F_c(Y)$は，Yの閉凸集合全体である。この定理以後研究は進み，Banach空間の幾何，幾何学的トポロジー延いては経済の数学に至るまで，選択写像の研究は多方面に応用されている。また，$\varphi : X \to 2^Y$に対して，集合値写像$\psi : X \to 2^Y$が，全ての$x \in X$に対して$\psi(x) \subset \varphi(x)$を満たすとき，$\psi$を$\varphi$の集合値選択写像という。Michael-Čobanにより，この場合もparacompact性を特徴付ける集合値選択写像の存在定理が知られている。これらの結果から示唆されることとして，どのようなとき（集合値）選択写像が存在するか，逆に，その存在が空間Xの位相的性質をいかに規定するか，という素朴な問題が生じる。本研究においては，この2点を研究の基本的視点として高度な議論が展開されている。また，この分野では，通常の専門的知識の範囲を越え，線形位相空間論，測度論等の知識も要求される。著者は，旺盛な研究欲によりこの難関を越え，本論文において優れた研究成果を挙げた。

以下，本論文の内容を述べると，第1章では，基本事項の準備の後，各章に関連する幾つかの基本的事実を述べている。

幾つかの実数空間のコピーによる積空間の閉部分空間と同相である位相空間を，実compact空間という。この概念は，一様系においては，ある種の完備的性質で，非可測な濃度の空間の下では，Dieudonné完備性

と一致する。1981 年 Blum-Swaminathan は，濃度非可測な完全正則空間 X の実 compact 性を，局所凸線形位相空間 Y へのある種の条件を満たす下半連続な任意の写像 $\varphi : X \to K(Y)$ が，連続な選択写像を持つこととして特徴付けた。$K(Y)$ は Y の凸集合全体である。第 2 章においては，空間の濃度を仮定せずに，この結果をより精緻な形に導くことに成功している。まず，実 compact 性を，同種な写像 $\varphi : X \to K(Y)$ の連続選択写像 $f : X \to Y$ で $f(x)$ が可分となるものの存在として特徴付けた。さらに，Dieudonné 完備性も同じ方向で特徴付けることに成功している。

第 3 章は，finitistic 空間を，選択写像の存在によって考察をすることを基調をしており，著者によって初めて案出された研究である。空間 X の任意の開被覆が次数有限の開細分を持つとき，X を finitistic という。この概念は，compact 性と空間の有限次元性双方の一般化で，近年は次元論の観点からの研究がされている。Čoban は，paracompact n- 次元空間 X を，完備距離空間 Y への写像 $\varphi : X \to F(Y)$ に対して，条件“$\mathrm{Card}\psi(x) \leq n+1$，$x \in X$”を満たす上半連続な φ の集合値選択写像の存在により特徴付けた。著者は，この定理の finitistic 版を得るべく，まず A ⊂ X と X の開被覆 U に対しある基数 l（A，U）を定義し，上の条件に代えて，Y の開被覆 V に対し条件“$\sup\{l(\psi(x), V) | x \in X) < \omega$”を満たす上半連続な集合値選択写像に着目し，paracompact finitistic 空間を特徴付ける定理を構築した。

第 4 章では，Ivanšić-Rubin による，空間 X から単体的複体 K の弱位相をもつ多面体 $|K|_\omega$ への単体値写像 ϕ: $X \to 2^{|K|\omega}$，すなわち $\phi(x) \in K$，$x \in X$ を満たす写像，に対する選択写像の定理を，PF- 正規の概念を用いて精密化した。さらに，著者自身の定義による擬 finitistic 空間を同様な手法で特徴付けている。

第 5 章は，無限次元空間を，選択写像の存在による特徴付けを指向している。1993 年 Gutev は，距離空間 X が可算次元空間であることを，ある種の集合値写像による選択写像により特徴付けた。これに示唆され，本論文では距離空間が大きい帰納的次元を持つための必要十分条件を，ある種の集合値写像による選択写像により与えた。

審 査 の 結 果 の 要 旨

上述の Michael の定理以来，この分野は 50 年の歴史があり，初学者ともいえる著者にとっては大きい分野であるが，選択写像の存在について正面から取り組み，興味ある成果を得た。特に，finitistic 空間と選択写像の存在の議論及びその成果は，著者独自の着想として高く評価され，多くの研究者から今後の伸展が期待されている。本論文は，成果およびその手法を通して，選択写像の研究の今後の発展に大いに寄与したものと考えられる。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。